Construction d'opérateurs de régularisation à partir de l'approche micromorphe de la plasticité et de l'endommagement à gradient

Samuel Forest

Construction d'opérateurs de régularisation à partir de l'approche micromorphe de la plasticité et de l'endommagement à gradient

S. FOREST

Centre des Matériaux UMR 7633
Mines ParisTech CNRS
BP 87 91003 Evry
samuel.forest@ensmp.fr

Résumé :

L'approche micromorphe de la plasticité et de l'endommagement à gradient est utilisée pour produire de nouveaux opérateurs de régularisation dans le contexte de la mécanique non linéaire géométrique ou matérielle.

Abstract :

The micromorphic approach to gradient plasticity and damage is used to construct new regularisation operators arising in the mechanics of non linear material laws or large deformations.

Mots clefs : Milieu micromorphe, Plasticité à gradient, Gradient d'endommagement, Régularisation

1 Introduction

La simulation des phénomènes de localisation de la déformation plastique et de l'endommagement pose des problème bien identifiés liés au caractère mal posé du problème incrémental aux limites correspondant [1]. Le recours a des méthodes de régularisation est souvent incontournable et s'appuie sur l'introduction mathématique d'opérateurs de régularisation de type diffusion [2]. Une formulation récente [3] généralisant la théorie des milieux micromorphes due à Mindlin et Eringen [4, 5] fournit une justification thermomécanique à de nombreux opérateurs existants et représente une méthode systématique de constructions de tels opérateurs.

La méthode a été appliquée à la simulation des phénomènes de localisation de la déformation en plasticité dans les métaux denses ou poreux [6, 7] et à l'endommagement et la fissuration dans les milieux anisotropes [8, 9]. Plus récemment, elle a été étendue au domaine de la mise en forme [10] en introduisant, de manière originale, les termes d'inertie micromorphes issus des théories initiales d'Eringen et Mindlin, pour le calcul explicite par éléments finis.

Les opérateurs de régularisation font systématiquement appel à des paramètres de longueur interne qu'il est possible d'identifier grâce à des mesures de champs [11, 12].

Dans ce travail, la méthode est utilisée pour construire des opérateurs de régularisation généralisés, voire non linéaires, dont les qualités restent à valider dans le futur.

2 Lois d'écrouissage en plasticité micromorphe

Dans le cas de la plasticité isotrope par exemple, la méthode consiste à introduire un degré de liberté supplémentaire, p_χ, appelé microdéformation plastique, associé à la déformation plastique cumulée usuelle, p. Un potentiel d'énergie libre de Helmholtz de la forme :

$$\psi(\underset{\sim}{\varepsilon}^e, \alpha, p_\chi, \boldsymbol{\nabla} p_\chi) = \psi_0(\underset{\sim}{\varepsilon}^e, \alpha) + \frac{1}{2} H_\chi (p - p_\chi)^2 + A \boldsymbol{\nabla} p_\chi \cdot \boldsymbol{\nabla} p_\chi \tag{1}$$

où $\underset{\sim}{\varepsilon}^e$ est le tenseur des déformations élastiques, α la collection des variables internes décrivant l'écrouissage du matériau, ψ_0 un prototype de fonction énergie libre, est combiné à l'équation d'équilibre des contraintes généralisées associées à la variable micromorphe et à son gradient, pour donner l'équation aux dérivées partielles suivante pour la variable p_χ:

$$p = p_\chi - \frac{A}{H_\chi} \Delta p_\chi \tag{2}$$

appelée opérateur de régularisation pour p et faisant intervenir le laplacien Δ. Le paramètre H_χ représente une pénalisation de la différence entre macro et microdéformation plastique, tandis que A est responsable de l'existence de longueurs caractéristiques dans le modèle, dont $\sqrt{A/H_\chi}$ est l'une d'elles.

Contrairement aux premiers usages de ce type d'opérateurs [2], l'outil mathématique ne peut pas être utilisé de manière heuristique en substituant p par p_χ dans les lois d'écrouissage du matériau de départ décrit par ψ_0. Le couplage entre les variables micromorphes et les lois d'écrouissage surgit plutôt de l'application systématique de la méthode de la thermodynamique des milieux continus [3]. Cette approche permet alors de décrire simultanément des effets d'échelles en durcissement (couches limites en $\cosh$) et des bandes de localisation (profil harmonique) [6, 13, 14].

L'usage de potentiels non quadratiques en fonction de $\boldsymbol{\nabla} p_\chi$ dans (1) est recommandé dans le contexte de la théorie des dislocations [15, 16, 17]. Nous montrerons la forme de l'opérateur non linéaire de régularisation correspondant.

3 Opérateur de régularisation en plasticité anisotrope et anisotherme

L'avantage insigne de la méthode proposée est que la condition de cohérence en plasticité indépendante du temps n'est pas une équations aux dérivées partielles mais une équation différentielle dépendant des incréments de chargement classiques et micromorphes. Cela permet une programmation aisée dans un code par éléments finis.

La formulation du potentiel (1) permet de généraliser les opérateurs (2) au cas anisotrope d'une part, en introduisant le tenseur complet d'ordre 2 $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ au lieu de sa seule partie sphérique, et au cas anisotherme d'autre part entraînant l'existence d'un terme supplémentaire faisant intervenir le gradient de température [3].

4 Opérateurs de régularisation en grandes déformations élastoplastiques

La généréalisation de la méthode au cas des grandes déformations conduit à une multitude d'opérateurs de régularisations possibles suivant le cadre de la formulation choisi. La classe des lois de comportement en référentiel local objectif [18, 19, 20] a été utilisée dans [10]. Le statut thermodynamique de cette formulation reste à établir.

Lorsque la cinématique est décrite à l'aide d'une décomposition multiplicative du gradient de la transformation en parties élastique et plastique, avec le choix approprié d'un trièdre directeur, on montre trois classes d'opérateurs de localisation en choisissant une loi de comportement linéaire entre le gradient de la variable micromorphe par rapport aux configurations lagrangienne, eulérienne ou intermédiaire, et les contraintes généralisées associées [21, 8]. La qualité des opérateurs obtenus reste à déterminer.

References

[1] S. Forest and E. Lorentz. Localization and regularization. In J. Besson, editor, *Local approach to fracture*, pages 311–373. Ecole des Mines de Paris–Les Presses, 2004.

[2] R.H.J. Peerlings, R. de Borst, W.A.M. Brekelmans, and J.H.P. de Vree. Gradient-enhanced damage for quasi-brittle materials. *Int. J. Num. Meth. Engng*, 39:3391–3403, 1996.

[3] S. Forest. The micromorphic approach for gradient elasticity, viscoplasticity and damage. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 135:117–131, 2009.

[4] R.D. Mindlin. Micro–structure in linear elasticity. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 16:51–78, 1964.

[5] A.C. Eringen. *Microcontinuum field theories*. Springer, New York, 1999.

[6] T. Dillard, S. Forest, and P. Ienny. Micromorphic continuum modelling of the deformation and fracture behaviour of nickel foams. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 25:526–549, 2006.

[7] M. Mazière and S. Forest. Strain gradient plasticity modeling and finite element simulation of lüders band formation and propagation. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 27:83–104, 2015.

[8] O. Aslan, N. M. Cordero, A. Gaubert, and S. Forest. Micromorphic approach to single crystal plasticity and damage. *International Journal of Engineering Science*, 49:1311–1325, 2011.

[9] O. Aslan, S. Quilici, and S. Forest. Numerical modeling of fatigue crack growth in single crystals based on microdamage theory. *International Journal of Damage Mechanics*, 20:681–705, 2011.

[10] K. Saanouni and M. Hamed. Micromorphic approach for finite gradient-elastoplasticity fully coupled with ductile damage: Formulation and computational aspects. *International Journal of Solids and Structures*, 50:2289–2309, 2013.

[11] M.G.D. Geers, R. de Borst, W.A.M Brekelmans, and R.H.J. Peerlings. On the use of local strain fields for the determination of the intrinsic length scale. *Journal de Physique IV*, 8:Pr8–167–174, 1998.

[12] C. Labergere, B. Guelorget, and M. Francois. Strain rate distribution and localization band width evolution during tensile test. *International Journal of Solids and Structures*, 51:3944–3961, 2014.

[13] L.H. Poh, R.H.J. Peerlings, M.G.D. Geers, and S. Swaddiwudhipong. An implicit tensorial gradient plasticity model - Formulation and comparison with a scalar gradient model. *International Journal of Solids and Structures*, 48:2595–2604, 2011.

[14] R.H.J. Peerlings, L.H. Poh, and M.G.D. Geers. An implicit gradient plasticity-damage theory for predicting size effects in hardening and softening. *Engineering Fracture Mechanics*, 95:2–12, 2012.

[15] B. Svendsen and S. Bargmann. On the continuum thermodynamic rate variational formulation of models for extended crystal plasticity at large deformation. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 58:1253–1271, 2010.

[16] S. Forest and N. Guéninchault. Inspection of free energy functions in gradient crystal plasticity. *Acta Mechanica Sinica*, 29:763–772, 2013.

[17] S. Wulfinghoff, S. Forest, and T. Böhlke. Logarithmic and rank-one defect energies in gradient crystal plasticity analytical and numerical 1d solutions. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 79:1–20, 2015.

[18] A. Dogui and F. Sidoroff. Kinematic hardening in large elastoplastic strain. *Engineering Fracture Mechanics*, 21:685–695, 1985.

[19] S. Forest and P. Pilvin. Modelling finite deformation of polycrystals using local objective frames. *Z. Angew. Math. Mech.*, 79:S199–S202, 1999.

[20] J. Besson, G. Cailletaud, J.-L. Chaboche, S. Forest, and M. Blétry. *Non–Linear Mechanics of Materials*. Series: Solid Mechanics and Its Applications, Vol. 167, Springer, ISBN: 978-90-481-3355-0, 433 p., 2009.

[21] S. Forest and R. Sievert. Elastoviscoplastic constitutive frameworks for generalized continua. *Acta Mechanica*, 160:71–111, 2003.